

質問

Q: $|P\psi(1,2)|^2 = |\psi(1,2)|^2 \Rightarrow \psi(2,1) = \pm\psi(1,2)$ について、
 ψ が複素数であると考えたとこれは正しくないのでは

A: 実際には $P\psi(1,2) = \psi(2,1) = e^{i\theta}\psi(1,2)$ であれば、物理的(観測的)に正しい解になります。しかし、2つの粒子の交換を2回繰り返すと、元に戻る必要があります。

$$PP\psi(1,2) = e^{i2\theta}\psi(1,2) = \psi(1,2)$$

なので、 $e^{i2\theta} = 1$ 、つまり、 $2\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$, となりますが、独立な値は $\theta = 0, \pi$ 、つまり、 $e^{i\theta} = \pm 1$ だけになります

Q: 反対称な波動関数に関して、 $\psi(1,2) = \varphi_a(1)\varphi_a(2) - \varphi_a(2)\varphi_a(1)$ に関して、1と2が同じ状態を占める場合になぜ二項目 $\varphi_a(2)\varphi_a(1)$ の符号が+になるのでしょうか。

A: 講義中の説明とスライドが悪かったかもしれません。

この式において、 $\varphi_a(2)\varphi_a(1)$ を置き換える必要はなく、単なる算数で 0 になります。

$$\psi(1,2) = \varphi_a(1)\varphi_a(2) - \varphi_a(2)\varphi_a(1) = 0$$

質問

Q: エネルギー $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$ を持つ調和振動子系は、エネルギー $\hbar\omega$ をもつフォノンの集まりとして解釈できるとあったが、零点エネルギーは無視しても大丈夫な根拠が分からない。

A: 学部 of 統計力学、多体電子系などを扱う際には、エネルギーの微分 (比熱) や差を問題にすることが多く、定数の零点エネルギーが結果に残ることはほとんどないので、問題になりません。

また、エネルギーの絶対値を問題にする際、フォノンの場合は、零点エネルギーは $\frac{3N}{2} \hbar\omega$ (N原子のそれぞれにx,y,z自由度の零点エネルギー) と有限なので、零点エネルギーを考慮しても問題ありません。

しかし、電磁場を光子の集まりと考えると、連続電磁場の波長は連続に変わるので、自由度が ∞ になり、零点エネルギーも ∞ に発散してしまい、大問題となります。

この問題は量子電磁力学で光子との自己相互作用を考量した際に電子の質量が発散することで大問題になりました。これについては、 $+\infty$ に発散する質量を実測されている電子の静止質量に置き換える「繰り込み理論」によって解決されていますが、調和振動子の零点エネルギーを理論に入れることは簡単な問題ではないことがあります (超弦理論でも同様)。

質問

Q: Boltzmann分布、Fermi-Dirac分布、Bose-Einstein分布では配置数 W の考え方がそれぞれ異なるのに、なぜBoltzmann近似では同じ分布式になるのか。
数学ではなく物理的に説明してほしい

Q: Fermi-Dirac分布が $\frac{e^{i-\mu}}{k_B T} \gg 1$ のとき古典的なBoltzmann近似できるのは、
どのような物理的意味があるのか

A1: Fermi-Dirac分布が $\frac{e^{i-\mu}}{k_B T} \gg 1$ のとき、粒子の占有確率が非常に小さくなり、
粒子間の量子統計的な排他効果(パウリの排他原理)の影響が無視できるため、
古典的なボルツマン分布で近似できるようになります

質問

A2: 物理理論は、歴史を下ると、以前の理論で説明できない現象が見つかり、新しい理論に置き換えられていきます。

例: Newton力学 \Rightarrow 光速度一定の原理を説明できない \Rightarrow 特殊相対性理論

Newton力学 \Rightarrow 電子が波と粒子の二重性を示すことを説明できない \Rightarrow 量子力学

古典統計力学 \Rightarrow 低温での物性を説明できない \Rightarrow 量子統計力学

しかし、「新しい理論に置き換えられる」というのは、以前の理論が誤った理論であるという意味ではありません。以前の理論は、適用範囲内では問題なく使えていたのですから。ですから、新しい理論は、ある極限において、以前の理論を包含 (以前の理論に漸近) しなければいけません。

統計分布関数の場合は、「ある極限」が $\frac{e^{i-\mu}}{k_B T} \gg 1$ であるという意味です。

注意しないといけないのは、量子力学の古典極限は、プランク定数 $h \Rightarrow 0$ の条件、つまり、離散的エネルギーの間隔が十分に小さいときになりますが、これは、統計分布関数の古典極限とは逆の極限です

質問

Q: Bose-Einstein分布は規格化できるか

A: Bose分布には化学ポテンシャル μ があり、これが規格化定数に相当します。

$$f(e_i) = \frac{1}{e^{\beta(e_i - \mu)} \pm 1}$$

単純な比例係数としての前置因子ではないのでわかりにくくなっていますが、古典近似の場合には $e^{\beta\mu} = \frac{1}{Z}$ と、単純な規格化定数になります。

Planck分布の場合には、 μ はありませんので、規格化は不要です(できません)

質問

Q: 分配関数とはそれぞれの粒子に関する式の和という考えで問題ないでしょうか。

A: 全ての状態に関する和です。粒子が独立な場合は、それぞれの粒子の状態の和という意味で、「それぞれの粒子に関する式の和」と考えることは間違っていないです。

Q: Fermi-Dirac分布関数に関して、 $e_i < \mu$ ($e_i > \mu$) の準位が占有されているというのはどういう意味かもう一度説明をいただきたいです。

A: まず、0 Kの基底状態では、エネルギーの低い状態から順番に粒子が占有していきます。Fermi-Dirac粒子の場合は、1つの状態を1つの粒子しか占有できないので、あるエネルギー (化学ポテンシャル μ) までは粒子が占有している状態、それ以上のエネルギーは粒子が占有していない状態になります。

統計分布関数は、エネルギー e_i の状態を粒子が占める確率なので、FD分布は化学ポテンシャル μ までは 1 (粒子が占有している状態)、それ以上のエネルギーは粒子が 0 (占有していない状態)になります。