### 第3回講義 補足：マクスウェル分布と統計力学の基礎原理

#### 1. 前回の課題解説：なぜ統計分布は指数関数になるのか？

前回の課題は、「マクスウェルの速度分布をはじめとする統計分布関数は、なぜエネルギーに関して指数関数の形をとるのか説明せよ」というものでした。

この問題の核心を、数学的な視点から簡潔に表現すると、以下のようになります。

**「互いに独立な変数の和で表される物理量を持つ関数が、それぞれの変数の関数の積で表される場合、その関数は指数関数に限られる」**

$$f(ξ+η+ζ)∝f(ξ)f(η)f(ζ)$$

このような性質を持つ関数は、**指数関数**

$$f(x)=Aexp(αx)$$

の形しかありえません。

この「独立性と乗法性」から指数関数が導かれるという考え方は、後に学ぶ**正準分布（カノニカル分布）**など、統計力学の様々な場面で繰り返し現れる根源的な考え方ですので、ぜひここで直感的に理解しておいてください。

#### 2. 質問への回答

##### 質問1：回転対称性は空間の等方性に含まれるのではないか？

**【回答】** その通り、非常に的確な指摘です。厳密に言えば、「等方性（Isotropy）」とは「あらゆる方向に対して物理的性質が変わらない」ことであり、これは「任意の回転操作に対して系が対称である（回転対称性）」ことと完全に同義です。

ではなぜ、前回の講義で「① x, y, z 方向が等価である」ことと「② 回転対称性（分布関数が角度 $θ,ϕ$ に依存しない）」を別々の条件として提示したのか。これは、導出過程をより分かりやすくするための教育的な配慮からです。

1. まず、「x, y, z方向の等価性」という少し弱い条件から、3方向の速度分布関数が同じ関数形

$$g(v\_{x})=g(v\_{y})=g(v\_{z})$$

* であることを導きます。
* 次に、より強い「回転対称性」の条件を課すことで、分布関数が速度ベクトルの大きさ $|v|$ に依存する関数 $f(|v|)$ であることを導きます。

このように段階を踏むことで、それぞれの対称性が分布関数の形にどのような制約を与えるのかを明確に理解することができます。

##### 質問2：マクスウェル分布の導出で、なぜ2階微分方程式を解いたのか？1階微分で十分ではないか？

**【回答】1階微分で解く方が数学的にはよりエレガントで、かつ必要十分**です。

1階微分を用いた導出方法をここで示しておきましょう。先ほどの関数方程式、

$$f(ξ+η+ζ)=Cf(ξ)f(η)f(ζ)$$

について、$η$ と$ζ$　を定数と見なし、両辺を$ξ$で微分します。

$$f^{'}(ξ+η+ζ)=Cf^{'}(ξ)f(η)f(ζ)$$

ここで、$η=ζ=0$ とおくと、$f(0)$や$f^{'}(0)$は定数なので、

$$f^{'}(ξ)=[Cf(0)f^{'}(0)]f(ξ)=αf(ξ)$$

という、非常にシンプルな1階の線形微分方程式が得られます。ここで $α$ は定数です。この方程式の解は、よく知られているように指数関数

$$f(ξ)=Ae^{αξ}$$

となります。確率分布が発散しないという物理的条件から $α<0$ となり、最終的にマクスウェル分布の形が導かれます。

では、なぜ多くの教科書、そしてこの講義で、2階微分を用いる（あるいはそれに類する）少し遠回りに見える方法を紹介したのでしょうか。これにはいくつかの理由が考えられます。

1. **歴史的経緯の尊重**: この方法は、**ジェームズ・クラーク・マクスウェル**自身が1860年の論文 “Illustrations of the Dynamical Theory of Gases” で用いた、オリジナルの導出方法に基づいています。科学の理論がどのように生まれ、発展してきたかを学ぶ上で、その源流に触れることは非常に重要です。
2. **伝統的な教育方法**: マクスウェルの方法はその後の物理学者にも大きな影響を与えました。例えば、日本の統計力学の権威である**久保亮五**先生や、量子力学の礎を築いた**アーノルド・ゾンマーフェルト**といった大家の教科書でも、このマクスウェル流の導出法が採用されており、教育的なスタンダードの一つとなっています。
3. **物理学の思考法の学習**: このように2階微分を用いる方法が複数の教科書でも採用されてきたのは、「まず数学的な一般解を求め、その後に物理的な境界条件や要請を適用して解を絞り込む」という、物理学における問題解決の王道的なアプローチの教育的配慮という側面があるようです。

この講義では、統計力学という学問がどのように構築されてきたか、その歴史的な背景と共に理解を深めていくことを重視しています。そのため、敢えてマクスウェルのオリジナルの思考を追体験できるこの方法を紹介しました。もちろん、数学的な正しさと簡潔さの点では1階微分による導出が優れています。両方のアプローチを理解し、その上で物理的な本質を掴むことができれば理想的です。

##### 質問3：導出に理想気体の状態方程式を使っているので、この分布は理想気体にしか適用できないのではないか？

**【回答】** これは、物理理論の構築と適用範囲に関する、非常に重要な問いです。理論の展開をもう一度丁寧に振り返ってみましょう。

1. **Step 1: 対称性から関数の「形」を決定する** まず、我々は空間の対称性という極めて一般的で強力な原理だけを用いて、速度分布関数の「形」が

$$f(v)∝exp(-αv^{2})$$

* となることを導きました。この段階では、未定定数$α$が一体何を表す物理量なのか、全く分かっていません。
* **Step 2: 既知の法則との整合性から定数を決定する** 次に、この未定定数 $α$ を決定する必要があります。対称性の原理はすでに使い切ってしまったので、何か別の物理的な手がかりが必要です。ここで物理学が数学と異なるのは、「**現実の現象を説明できなければならない**」という絶対的な要請がある点です。 そこで、我々が導いた分布関数が、少なくとも最も単純なモデルである**理想気体の振る舞い（状態方程式** $PV=nRT$**）**と矛盾しないことを要請します。これは、理論が満たすべき**必要条件**です。この要請に基づいて計算を進めると、未定定数 $α$ が、

$$α=\frac{m}{2k\_{B}T}$$

* であることが明らかになります。ここで $k\_{B}$ はボルツマン定数、$T$ は絶対温度です。
* **Step 3: 導かれた結論の普遍性を考察する** ここが最も重要なポイントです。定数 $α$ を決めるために理想気体という単純なモデルを使いましたが、その結果として得られた結論は、$α$ が気体の種類や分子の質量 $m$ 、そして**絶対温度** $T$ という、極めて普遍的な物理量だけで決まることを示しています。 もし $α$ が、分子間の相互作用の強さなど、系の相互作用や物理モデルなどに特有のパラメータに依存するような結果になっていれば、この分布関数は理想気体にしか使えない限定的なものだったでしょう。しかし、結果はそうではありませんでした。
* この**普遍性**こそが、理想気体という足がかりを使って導出したマクスウェルの速度分布が、分子間相互作用が無視できない実在気体や、液体中の分子の速度分布など、より広範な系に対しても（近似的に）適用できる可能性を示唆しているのです。

もちろん、どんな物理理論にも**適用限界**があります。ニュートン力学が光速に近い速度では相対性理論に、原子スケールでは量子力学に修正されるのと同じです。同様に、マクスウェル分布も、外部からポテンシャルが加わっている場合や分子間に強い相互作用がある場合には、後に学ぶ**ボルツマン分布**や**正準分布**といった、より一般的な分布関数へと拡張・修正されていきます。

物理学とは、このように「単純なモデルから出発して普遍的な法則を見出し、実験との比較を通じてその理論の適用範囲を検証し、矛盾が見つかればより一般性の高い理論へと拡張していく」という学問なのです。