

Computational Materials Science (計算材料学特論)

Lecture materials: http://d2mate.mdxes.iir.isct.ac.jp/D2MatE/D2MatE_programs.html?page=cms

 D²MatE [D²MatE Program Top](#) [This page](#)

[source HTML](#) [display HTML](#)

2025年度Q2 計算材料学特論 (資料: 英語 + 日本語版) COMPUTATIONAL MATERIALS SCIENCE 2025 Q2

数値解析に関する講義資料・pythonプログラム (神谷担当分)
Lecture materials for numerical analyses (by Kamiya)

講義で使うプレゼン資料は共通して使うpythonプログラム」の下にあります
Lecture presentation slides are found after the "Common python programs" section below.

Update News:

- June 4, 17:59 Lecture materials on June 10 have been uploaded ([20250604ComputerAndErrorSources.zip](#))

▶ [詳細履歴](#)

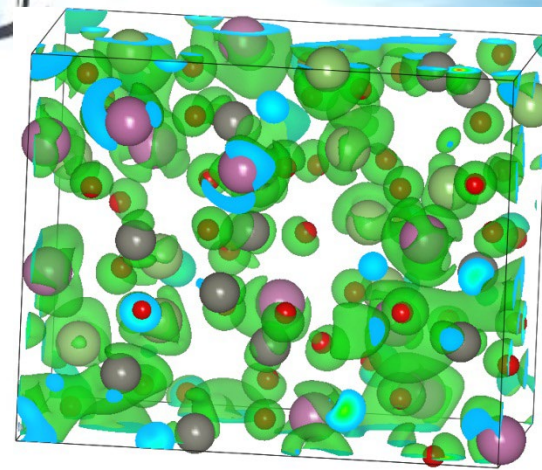
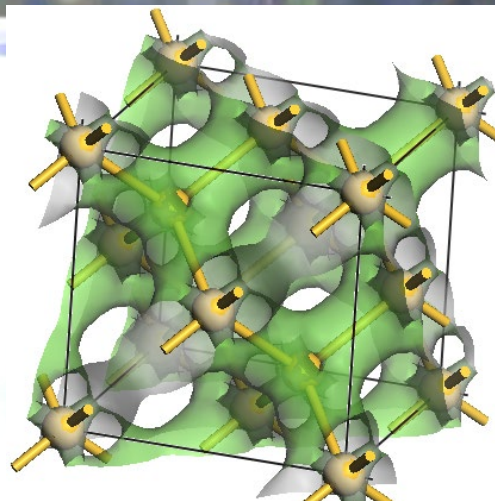
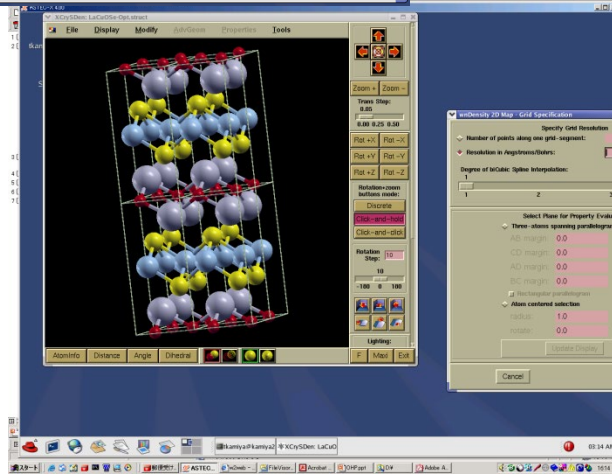
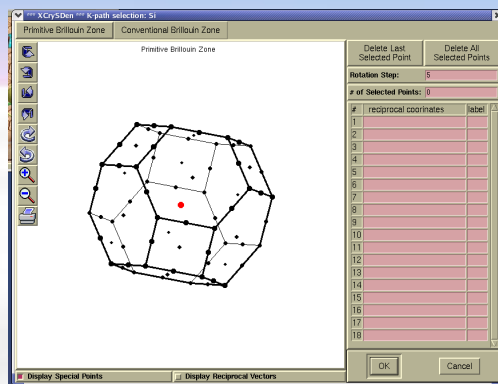
pythonプログラミングを始める前に (Getting Started with python)

本講義では、pythonは必須ではありませんが、アルゴリズムの理解と今後の研究に役に立ちますので、余裕のある人は試してみてください。
python is not a requirement for this class, but it will help your understanding about the algorithms to be learned and also assist your future

Computational Materials Science

計算材料学特論

Toshio Kamiya
神谷利夫



Class Schedule

Lecture materials (Kamiya's part): http://d2mate.mdxes.iir.isct.ac.jp/D2MatE/D2MatE_programs.html?page=cms

- #01 June 10 (Tue) Kamiya (Fundamental of computer, Sources of errors (コンピュータの基礎、誤差))
- #02 June 13 (Fri) Kamiya (Numerical differentiation/integration (数値微分/積分),
Differential equation (微分方程式))
- #03 June 17 (Tue) Kamiya (Differential equation (微分方程式), Molecular dynamics (分子動力学法),
Interpolation (補間), Smoothing (平滑化))
- #04 June 20 (Fri) Kamiya (Linear least-squares method (線形最小二乗法), Optimization (最適化),
Numerical solutions of equations (方程式の数値解法), Nonlinear optimization (非線形最適化))
- #05 June 24 (Tue) Kamiya (Nonlinear optimization (非線形最適化),
Fourier transformation (フーリエ変換))
- #06 June 27 (Fri) Kamiya, Matrix (行列)
- #07 July 1 (Tue) Kamiya, Review (復習)
- #08 July 4 (Fri) Sasagawa (Review of quantum theory 1: 量子論おさらい1)
- #09 July 8 (Tue) Sasagawa (Review of quantum theory 2: 量子論おさらい2)
- #10 July 11 (Fri) Sasagawa (First principles calculations: basics 1 第一原理計算:基礎1)
- #11 July 15 (Tue) Sasagawa (First principles calculations: basics 2 第一原理計算:基礎2)
- #12 July 18 (Fri) Sasagawa (First principles calc.: applications 1 第一原理計算:応用1)
- #13 July 22 (Tue) Sasagawa (First principles calc.: applications 2 第一原理計算:応用2)
- #14 July 25 (Fri) Sasagawa (Classical and Quantum Computers 古典および量子コンピュータ)

English textbooks

Search by ‘numerical analysis’, ‘numerical simulation’, ‘数值解析’ etc.

1. *Introduction to Applied Numerical Analysis*

Richard W. Hamming

Dover publications, inc., New York (1989)

~340 pages

2. *A First Course in Numerical Analysis*

Anthony Ralston and Philip Rabinowitz

Dover publications, inc., New York (1978)

~600 pages

For practical programming: Numerical Recipes series

1. Numerical Recipes in C

2. Numerical Recipes Example Book (FORTRAN)

3. Numerical Recipes Source Code

Second Edition: C, Fortran77, Fortran 90

Third Edition: C++

Policy

Evaluation:

1. Assignment is given in each class
2. Term-end assignment

You can use AI like ChatGPT, but your answers must include your own thought and improvements.

Absence of class

1. If you can't join a class, let me know prior to the class.

Zoom record

1. Classes will be recorded, used only for students who request watching it.

Numerical analysis web

http://d2mate.mdxes.iir.isct.ac.jp/D2MatE/D2MatE_programs.html?page=cms



[D²MatE Program Top](#) [This page](#)

source HTML

display HTML

2025年度Q2 計算材料学特論 (資料: 英語 + 日本語版) COMPUTATIONAL MATERIALS SCIENCE 2025 Q2

数値解析に関する講義資料・pythonプログラム (神谷担当分)
Lecture materials for numerical analyses (by Kamiva)

講義で使うプレゼン資料は共通して使うpythonプログラム」の下にあり
Lecture presentation slides are found after the "Common python p

Update News:

○ June 4, 17:59 Lecture materials on June 10 have been uploaded ([20250604](#))

▶ 詳細履歴

pythonプログラミングを始める前に (Getting Started with python)

本講義では、pythonは必須ではありませんが、アルゴリズムの理解と今後の研究に役に立ちますので、余裕のある人は試してみてください。
python is not a requirement for this class, but it will help your understanding about the algorithms to be learned and also assist your future

Note: Getting Started with python

python is not a requirement for this class, but it will help your understanding about the algorithms to be learned and also assist your future research.

注: pythonプログラミングを始める前に

本講義では、pythonは必須ではありませんが、アルゴリズムの理解と今後の研究に役に立ちますので、余裕のある人は試してみてください。

Other open programs [Japanese]

http://d2mate.mdxes.iir.isct.ac.jp/D2MatE/D2MatE_programs.html?page=top

The screenshot shows a web browser displaying the D2MatE programs page. The browser's address bar shows the URL: http://d2mate.mdxes.iir.isct.ac.jp/D2MatE/D2MatE_programs.html?page=top. The page has a navigation bar with tabs for 'top', 'Web Apps', 'チュートリアル', and various research topics. The main content area is divided into two columns. The left column contains links to 'source HTML' and 'display HTML', a list of links for '公開プログラムパッケージ' (Public Program Packages), and a section for 'インストール方法' (Installation Method). The right column features a header for '智慧とデータが拓くエレクトロニクス新材料開発拠点' (Public and Non-Public Program Information), a search bar, and a 'News' section with a list of recent updates and announcements.

source HTML | display HTML

- [共通ファイル・単位など](#)
[神谷・片瀬研共通単位表](#)

公開プログラムパッケージ

tkProg
ラウンチャプログラム Launcher.py から各プログラムを実行できるようにパッケージを配布しています

- [標準ディレクトリ構成](#)
- [Launcher プログラミング](#)
- [tkProg python ライブラリ: tklib](#)
- [データ読み込み plugin](#)

- **パッケージ記号**
A: 一般(all)
C: 神谷・片瀬研
D: D²MatE
• **その他記号**
p: perlが必要
L: Linuxのみ動作保証

注: インストールトラブル、エラーやバグを見つけた場合は、[このページ](#)に従って報告をお願いします。

- **インストール方法**

1. [python](#)
2. [pythonモジュール](#)
3. [tkProg](#)
4. [その他のモジュール](#)
5. [PHYSBOモジュールがインストールされなかった場合](#)

(必要な人のみ)

1. [VS Code](#)

Perlプログラムを使う場合はこちらが必要です

1. [perl, モジュール](#)

Linux/Unixを使う人は参考してください

1. [X Server設定\(例\)](#)
2. [tkProg Linux版インストール](#)

- **使用方法の説明**

一般

source HTML | display HTML

智慧とデータが拓くエレクトロニクス新材料開発拠点 公開・非公開プログラム情報

(DATA DRIVEN MATERIALS RESEARCH INSTITUTE FOR ELECTRONICS)

質問、要望、バグ報告などの連絡先: 神谷 利夫 tkamiya@msl.titech.ac.jp
東京科学大学総合研究院 元素戦略MDX研究センター教授

検索キーワードを入力

News

- **New!**2025/5/29 [Web Apps](#) ページに 汎用ファイルビューワを追加しました。
- **New!**2025/5/26 [オンラインチュートリアル](#) 薄膜トランジスタの録画を追加しました。
第8回 「薄膜トランジスタの原理と評価 (半導体物理基礎)」
第8回 「薄膜トランジスタの原理と評価 (簡単な近似)」
第8回 「薄膜トランジスタの原理と評価 (AOSTFTの特性)」
- **New!**2025/5/18 [オンラインチュートリアル](#) に薄膜トランジスタを追加しました。録画は後日公開予定です。
第8回 「薄膜トランジスタの原理と評価 (半導体物理基礎)」
第8回 「薄膜トランジスタの原理と評価 (簡単な近似とAOSの例)」
第8回 「薄膜トランジスタの原理と評価 (FETの理論)」
- **New!**2025/5/6 [Web Apps](#) ページを公開しました。
- **New!**2025/5/5 [生成AI・翻訳プログラム](#) のtranslate.pyを Gemini APIに対応させました。
Gemini APIは無料版でも使えますが、利用制限が厳しいです。
- **New!**2025/5/5 Tabメニューに「量子計算」を追加しました。
- **New!**2025/5/5 Tabメニューに「統計学」を追加しました。特に、ベイズ統計を利用したデータ解析を扱います。
- **New!**2025/5/3 以下の [オンラインチュートリアル](#) にベイズ回帰の汎用プログラム、モデル選択プログラムをを追加し、録画も更新しました。
2025年度第7回 誤差論 (ベイズ回帰)
- **New!**2025/4/28 [オンラインチュートリアル](#) を追加しました。
2025年度第7回 誤差論
- **New!**2025/4/26 [オンラインチュートリアル](#) を追加しました。
2025年度第5回 生成AIの利用: 翻訳
- **New!**2025/4/25 [オンラインチュートリアル](#) を追加しました。
2025年度第3回 生成AIの利用と注意
2025年度第4回 生成AIの利用: 一般的な質問と画像生成
2025年度第6回 生成AIの利用: プログラミング は2023年チュートリアルの再掲です
- 2025/4/8 [オンラインチュートリアル](#) の公開を始めました。

Python: A Light Weight Language (LWL)

Install: <http://conf.msl.titech.ac.jp/Lecture/InstallPython/InstallPython.html>

- **Interpreter language** (インタプリタ言語 – 逐次解釈)
 ⇔ Compiled language (コンパイル言語 – 機械語翻訳)
 Slower execution, but faster development
- Only **interpreter** and **editor** are required
- Free or public domain versions available
- Grammar similar to C, C++, perl, php, ...
- Native **Object-Oriented** (オブジェクト指向) language
- Efficient functions and libraries
 - Text processing: **Regular expression** (正規表現),
 csv, html, xml, json etc
 - Science: numpy, scipy, scikit-learn** etc
 - Network: ...
 - Graph plotting: matplotlib etc
 - GUI: tkinter, pygtk etc

Editor vs Word processor

	Editor	Word processor
Startup time (起動時間)	Shorter	Longer
Processing speed (実行速度)	Faster	Slower
Memory	Light	Heavy
Text style / format	Usually none	Required
File format	Basically text-based	Application specific
Others	Specialized for specific program languages. Macro (small program languages)	Print (WYSIWYG): What You See is What You Get
Examples	Linux : vi, emacs Windows: TeraPad, Sakura Editor Multi : Visual Studio Code, Sublime text, Atom	MS-Word

Recommendation:

Microsoft Visual Studio Code: <https://code.visualstudio.com/>

- Multiplatform (Windows, MacOS, Linux)
- Multilanguage
- Integrated Development Editor (IDE)

If interested in python and AI-based programming

http://d2mate.mdxes.iir.isct.ac.jp/D2MatE/D2MatE_programs.html?page=tutorial

材料計算科学・データ解析チュートリアルコース

文部科学省「データ創出・活用型マテリアル研究開発プロジェクト」半導体拠点 D²MatE では、材料計算科学・データ解析に関するチュートリアルコースを開催いたします。

- ▶ 第1回 「プレゼンテーションの技術 -構成の作り方-」
- ▶ 第1回 「プレゼンテーションの技術 -Excel VBAの使い方-」
- ▶ 第1回 「プレゼンテーションの技術 -Excelによる科学誌レベルのグラフの描き方-」
- ▶ 第2回 「論文やプレゼンテーションの英語」
- ▶ 第3回 「生成AIの利用と注意 (前半)」
- ▶ 第3回 「生成AIの利用と注意 (後半)」
- ▶ 第3回 「生成AIの利用と注意 (著作権)」
- ▶ 第4回 「生成AIの利用例: 一般的な質問と画像生成 (Part 1: 一般的な質問)」
- ▶ 第4回 「生成AIの利用例: 一般的な質問と画像生成 (Part 2: データの整形、会議資料の作成)」
- ▶ 第4回 「生成AIの利用例: 一般的な質問と画像生成 (Part 3: 数学の公式の証明)」
- ▶ 第4回 「生成AIの利用例: 一般的な質問と画像生成 (Part 4: 画像生成)」
- ▶ 第5回 「生成AIの利用例: 翻訳 (翻訳の注意、比較、クロスチェック)」
- ▶ 第5回 「生成AIの利用例: 翻訳 (translate.py)」

- ▶ 第6回 「生成AIの利用例: 学生と教員のためのpythonとChatGPT活用法」
- ▶ 第6回 「生成AIの利用例: 良いプログラムに必要な機能とtemplateを用いた高機能プログラムの作成」
- ▶ 第6回 「生成AIの利用例: 既存プログラムの理解と改良」

- ▶ 第7回 「誤差論 (ベイズ回帰)」
- ▶ 第8回 「薄膜トランジスタの原理と評価 (半導体物理基礎)」
- ▶ 第8回 「薄膜トランジスタの原理と評価 (簡単な近似: Gradual channel近似とSahの式)」
- ▶ 第8回 「薄膜トランジスタの原理と評価 (AOS TFTの特性)」
- ▶ 第8回 「薄膜トランジスタの原理と評価 (FETの理論)」
- ▶ 2024年度第1回 「チュートリアル: 実空間像から理解するバンド理論」
- ▶ 2024年度第2回 「チュートリアル: 第一原理計算は何の役に立つか」

PROBLEM, June 10

- **Submit electronic file(s) via LMS until the midnight of June 11**

(If LMS doesn't work, send the files to kamiya.t.aa@m.titech.ac.jp.

In this case, file name must include your STUDENT ID and FULL NAME)

Choose one of the following PROBLEM 1 or PROBLEM 2

PROBLEM 1:

- (i) Convert 101001_2 to base 10
- (ii) Convert 4251_{10} to base 16

PROBLEM 2:

Choose one of the python programs given today (sum_error.py, sum.py, base.py).

- Explain what each block of the source code does,

or

- list up the source code parts that you cannot understand what they do or why they are needed.

今日配布したプログラム (sum_error-plt.py, sum.py, base.py) から1つを選び、

以下のいずれかを答えよ

- ソースコードのそれぞれの部分が何をしているかを説明する
- ソースコードの中で理解できない部分、あるいは なぜそれが必要かわからない部分を述べよ

Fundamental of computer

コンピュータの基礎

Numeric representation

(数の表現)

Base 10 $1975 = 1 \times 1000 + 9 \times 100 + 7 \times 10 + 5 \times 1$
(decimal) $= 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 5 \times 10^0$
(10進数) the 1000's place
 (1000の位)

All data in computer are represented by **0 or 1** (binary) : **bit (b)**

Base 2 $(11011)_2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
(binary) $= 1 \times (16)_{10} + 1 \times (8)_{10} + 0 \times (4)_{10} + 1 \times (2)_{10} + 1 \times (1)_{10}$
(2進数) $= (27)_{10}$

Base r $N = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r^1 + a_0 r^0$
(r 進数) $= (a_n a_{n-1} \cdots a_3 a_2 a_1 a_0)_r$

Numeric representation

(数の表現)

Base 8 (octal) (8進数)

(01234567)

2 digits: $0 \sim 8^2 - 1 = 63$

$$\mathbf{00: } 0 \times 8^1 + 0 \times 8^0 = 0$$

$$\mathbf{53: } 5 \times 8^1 + 3 \times 8^0 = 43$$

$$\mathbf{77: } 7 \times 8^1 + 7 \times 8^0 = 63$$

Base 16 (hexadecimal) (16進数)

(0123456789ABCDEF) = (0 ~ 15)

2 digits: $0 \sim 16^2 - 1 = 255$

$$\mathbf{00: } 0 \times 16^1 + 0 \times 16^0 = 0$$

$$\mathbf{9F: } 9 \times 16^1 + 15 \times 16^0 = 159$$

$$\mathbf{FF: } 15 \times 16^1 + 15 \times 16^0 = 255$$

(ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

abcdefghijklmnopqrstuvwxyz

0123456789+/-) = (0 ~ 63)

Correspondence relations (対応関係)

Base 10	Base 2	Base 8	Base 16
0	0000	00	0
1	0001	01	1
2	0010	02	2
3	0011	03	3
4	0100	04	4
5	0101	05	5
6	0110	06	6
7	0111	07	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10

Convert Base (基数の変換)

Base r to Base 10

$$N_r = (a_n a_{n-1} \cdots a_3 a_2 a_1 a_0)_r$$

$$N_{10} = a_0 r^0 + a_1 r^1 + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \cdots + a_{n-1} r^{n-1} + a_n r^n$$

$$\text{Ex. } 1101_2 = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 = 13_{10}$$

Base 10 to Base r

$$N_{10} = (b_n b_{n-1} \cdots b_3 b_2 b_1 b_0)_{10} = (c_n c_{n-1} \cdots c_2 c_1 c_0)_r$$

$$= c_0 r^0 + c_1 r^1 + c_2 r^2 + \cdots + c_{n-1} r^{n-1} + c_n r^n$$

$$= c_0 + r(c_1 + c_2 r^1 + \cdots + c_{n-1} r^{n-2} + c_n r^{n-1})$$

$$= c_0 + r(c_1 + r(c_2 + c_3 r + \cdots + c_{n-1} r^{n-3} + c_n r^{n-2})) =$$

$$\underbrace{N_{10}^{(1)}}_{N_{10}^{(2)}}$$

$$(1) N_{10}^{(0)} = N_{10} = N_{10}^{(1)} * r + c_0 \quad \text{where } 0 \leq c_0 < r$$

$$(2) N_{10}^{(1)} = N_{10}^{(2)} * r + c_1 \quad \text{where } 0 \leq c_1 < r$$

... repeat until $N_{10}^{(n+1)} = 0$

$$\Rightarrow N_r = (c_n c_{n-1} \cdots c_2 c_1 c_0)_r$$

Ex. Base 10 to Base 8

$$302_{10} = 8 \times 37 + 6$$

$$37_{10} = 8 \times 4 + 5$$

$$4_{10} = 8 \times 0 + 4$$

$$302_{10} = 456_8$$

Python program: base.py

Program: base.py

Usage: python base.py value base_source base_target

Ex.

COMMAND:

python base.py FA 16 8

Convert FA in base 16 to base 8

OUTPUT:

Convert FA in base 16 to base 10

1st digit = 10: $+ 10 * 16^0 \Rightarrow + 10_{10} \Rightarrow 10_{10}$

2nd digit = 15: $+ 15 * 16^1 \Rightarrow + 240_{10} \Rightarrow 250_{10}$

Convert 250 in base 10 to base 8

$250_{10} = 31 * 8 + 2: \text{base_8} \Rightarrow 2$

$31_{10} = 3 * 8 + 7: \text{base_8} \Rightarrow 72$

$3_{10} = 0 * 8 + 3: \text{base_8} \Rightarrow 372_8 \text{ result}$

Units of data processed in computers

(コンピュータ内のデータ単位)

bit (b): binary: **0 or 1**

In computer: **8 bits data** is treated as a fundamental unit

byte (B): $0 \sim 2^8 - 1 = 255$

$$1 \text{ kB} = 2^{10} \text{ B} = 1,024 \text{ B}$$

$$1 \text{ MB} = 1024 \text{ kB} = 1,048,576 \text{ B}$$

$$1 \text{ TB} = 1024 \text{ GB} = 1024^2 \text{ MB} = 1024^3 \text{ kB} = 1024^4 \text{ B}$$

Numeric representation: Integer (整数型)

Integer type: Based on the CPU bit (CPUのbit数が基本)

16bit for 16bit CPU

unsigned int (符号無し整数型) $0 \sim 2^{16} - 1 = 65,535$

signed int (符号付き整数型) $-32,768 \sim +32,767$

32bit for 32bit CPU

unsigned int (符号無し整数型) $0 \sim 4,294,967,295$

signed int (符号付き整数型) $-2,147,483,648 \sim +2,147,483,647$

For all CPUs:

int : depends on CPU bits

short int : 16 bit

long int : 32 bit

long long int: 64 bit

Numeric representation: Floating point, Real

(浮動小数点型, 実数)

Floating point type: Minimum 32bit (except half precision)

The range of available value depends on computer architectures,
programming language etc.

C language (C言語)

float : 32 bit $3.4\text{E}-38 \sim 3.4\text{E}+38$
double : 64 bit $1.7\text{E}-308 \sim 1.7\text{E}+308$
long double: 64 bit

Fortran

Single precision (単精度) FP (REAL) : 32 bit
Double precision (倍精度) FP (DOUBLE) : 64 bit, 16 digits (桁) in decimal
Quadruple precision (4倍精度) FP (REAL*16) : 128 bit

Definition of IEEE 754 (binary32, binary64):

Sign : 1 bit

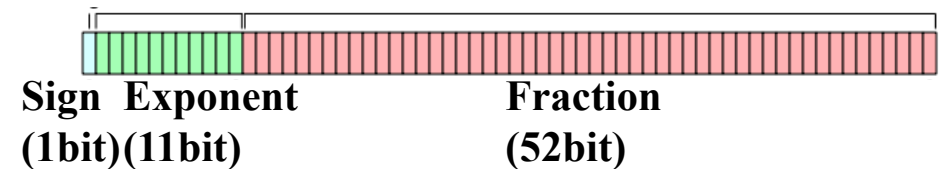
Exponent: 8 bits (REAL, $-128 \sim +127$) 11 bits (DOUBLE, $-1024 \sim +1023$)

Fraction : 23 bits (REAL) 52 bits (DOUBLE)

8,388,608: 7 digits 4,503,599,627,370,495: 16 digits

$$\begin{array}{c} \text{Sign} \\ \text{(符号)} \end{array} \text{--} \text{1.011101}_2 \times 2^{-0101_2} \begin{array}{c} \text{Exponent} \\ \text{(指数部)} \end{array}$$

\uparrow
Fraction
(仮数部)



Required variable sizes: Integer types

unsigned int (16 bit): 65,536

16 bit CPU can handle only 64 kB of memory
(アドレスバスが16bitだと、64 kBのメモリーしか扱えない)

unsigned int (32 bit): 4,294,967,295

32bit CPU can handle 4 GB memory
(アドレスバスが32bitだと、4 GBのメモリーを扱える)

GDP of Japan: ~5 trillion US\$ = 500,000,000,000,000 JYen
(requires 16 digits)

cf. unsigned long long int (64 bit): ~1.8E+19 (18 digits)

The ratio of the circumference of a circle (円周率):

Significant figure: 50 trillion digits (as of Jan, 2020)

Need to use multi-fold calculation (多倍長計算)

Implemented based on software

Required sizes: FP types for quantum calculations

1s orbital energy level:

H atom : 13.6 eV

heavy atoms: \gg keV

Energies related to physical properties

Thermal energy at room temperature: 26 meV

Magnetism: several meV

Quantum simulations of physical properties require the precision for the meV – MeV range (over 9 digits precision**)**

Definition of standard FP: IEEE 754

Fraction: 23 bit (single)	8,388,608	7 digits
---------------------------	-----------	----------

Fraction: 52bit (double)	4,503,599,627,370,495	16 digits
--------------------------	-----------------------	-----------

Required sizes: FP types for semiconductor simulation

Boltzmann factor: $\exp(-E_g / k_B T)$

$$E_g = 1.1 \text{ eV}$$

$$k_B T = 0.026 \text{ eV } (T = 300 \text{ K}) \Rightarrow \exp(-42) \sim 10^{-19}$$

$$E_g = 4.0 \text{ eV}$$

$$k_B T = 0.026 \text{ eV } (T = 300 \text{ K}) \Rightarrow \exp(-154) \sim 10^{-67}$$

$$k_B T = 0.00026 \text{ eV } (T = 3 \text{ K}) \Rightarrow \exp(-15400) \sim 10^{-5141}$$

Double precision (64bit): **Fraction: 16 digits**

Exponent: $-1024 \sim +1023$ ($2^{-1024} \sim 10^{-308}$)

Quad precision : 128 bit

Octuple precision (8倍精度): 256 bit

Error of floating point variables (浮動小数点型の誤差)

Representation of floating point in computer:

$$-1. \mathbf{011101}_2 \times 2^{-\mathbf{015}_{10}} \quad (\text{in binary})$$

Errors arise from converting Base 10 to Base 2.

- Some values do not have errors between Base 10 and Base 2 if fraction equals to 2^n

$$1.0 = (1.0)_2 \times 2^0$$

$$0.5 = (1.0)_2 \times 2^{-1}$$

$$0.125 = (1.0)_2 \times 2^{-3}$$

$$0.0390625 = 1.25 \times 2^{-5} = (1.01)_2 \times 2^{-5}$$

$$1.75 = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = (1.11)_2$$

$$0.65625 = 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} = (0.10101)_2$$

$$100.0 = 1.5625 \times 64 = (1 + 2^{-1} + 2^{-4}) \times 2^6 = (1.1001)_2 \times 2^4$$

- **Other values have errors**

even if it is represented by a simple figure in Base 10:

$$\mathbf{0.1 = (1.1001100110011001 \cdots)_2 \times 2^{-3}}$$

Program (roundoff error): sum_error.py

Usage: python sum_error.py *h n iPrintStep*

Summing up *h* for *n* times with different precision interger types. Output every *iPrintStep* steps.

python sum_error.py 0.1 100 20

exact:	sum16 (error)	sum32 (error)	sum64 (error)
0.1000:	0.099975585937500000 (+2.44e-05)	0.100000001490116119 (-1.49e-09)	0.100000000000000006 (+0.00e+00)
2.1000:	2.095703125000000000 (+4.30e-03)	2.100000143051147461 (-1.43e-07)	2.1000000000000000533 (-4.44e-16)
4.1000:	4.089843750000000000 (+1.02e-02)	4.099998474121093750 (+1.53e-06)	4.1000000000000001421 (-8.88e-16)
6.1000:	6.121093750000000000 (-2.11e-02)	6.099996566772460938 (+3.43e-06)	6.099999999999994316 (+6.22e-15)
8.1000:	8.148437500000000000 (-4.84e-02)	8.099994659423828125 (+5.34e-06)	8.099999999999987210 (+1.24e-14)

python sum_error.py 0.125 100 20

exact:	sum16 (error)	sum32 (error)	sum64 (error)
0.1250:	0.125000000000000000 (+0.00e+00)	0.125000000000000000 (+0.00e+00)	0.125000000000000000 (+0.00e+00)
2.6250:	2.625000000000000000 (+0.00e+00)	2.625000000000000000 (+0.00e+00)	2.625000000000000000 (+0.00e+00)
5.1250:	5.125000000000000000 (+0.00e+00)	5.125000000000000000 (+0.00e+00)	5.125000000000000000 (+0.00e+00)
7.6250:	7.625000000000000000 (+0.00e+00)	7.625000000000000000 (+0.00e+00)	7.625000000000000000 (+0.00e+00)
10.125:	10.125000000000000000 (+0.00e+00)	10.125000000000000000 (+0.00e+00)	10.125000000000000000 (+0.00e+00)

python sum_error.py 0.0390625 100 20

exact:	sum16 (error)	sum32 (error)	sum64 (error)
0.0391:	0.039062500000000000 (+0.00e+00)	0.039062500000000000 (+0.00e+00)	0.039062500000000000 (+0.00e+00)
0.8203:	0.820312500000000000 (+0.00e+00)	0.820312500000000000 (+0.00e+00)	0.820312500000000000 (+0.00e+00)
1.6016:	1.601562500000000000 (+0.00e+00)	1.601562500000000000 (+0.00e+00)	1.601562500000000000 (+0.00e+00)
2.3828:	2.382812500000000000 (+0.00e+00)	2.382812500000000000 (+0.00e+00)	2.382812500000000000 (+0.00e+00)
3.1641:	3.164062500000000000 (+0.00e+00)	3.164062500000000000 (+0.00e+00)	3.164062500000000000 (+0.00e+00)

Roundoff error (桁落ち誤差)

Summing small value h for many times N

Calc by summation

```
x = 0.0;
for i in range(N)
    x = x + h
```

Error is accumulated by each summation

Calc by multiplication

```
x0 = 0.0;
for i in range (N)
    x = x0 + i * h
```

Typically multiplication is slower than summation, but **the total error originates from only one multiplication operation**

Result of sum_error.py (compare different precision FP types): $h = 0.01$, $N = 101$

Program: sum_error.py

	float16: half precision, 16 bit	float32: single precision, 32 bit	float64: half precision, 64 bit
Exact:	float16 (error)	float32 (error)	float64 (error)
0.0100:	0.010002136230468750 (-2.14e-06)	0.009999999776482582 (+2.24e-10)	0.010000000000000000 (+0.00e+00)
0.1100:	0.110046386718750000 (-4.64e-05)	0.1099999984502792358 (+1.55e-08)	0.1099999999999999987 (+1.39e-17)
0.2100:	0.210083007812500000 (-8.30e-05)	0.2100000023245811462 (-2.32e-08)	0.21000000000000000048 (-5.55e-17)
0.3100:	0.310058593750000000 (-5.86e-05)	0.309999972581863403 (+2.74e-08)	0.310000000000000000109 (-1.11e-16)
0.4100:	0.410156250000000000 (-1.56e-04)	0.409999877214431763 (+1.23e-07)	0.410000000000000000198 (-1.67e-16)
0.5100:	0.509765625000000000 (+2.34e-04)	0.509999811649322510 (+1.88e-07)	0.510000000000000000231 (-2.22e-16)
...			
0.8100:	0.802734375000000000 (+7.27e-03)	0.809999525547027588 (+4.74e-07)	0.810000000000000000497 (-4.44e-16)
0.9100:	0.900390625000000000 (+9.61e-03)	0.909999430179595947 (+5.70e-07)	0.910000000000000000586 (-5.55e-16)
1.0100:	0.998046875000000000 (+1.20e-02)	1.009999394416809082 (+6.06e-07)	1.010000000000000000675 (-6.66e-16)

Python program: sum.py

Program: sum.py

Usage: `python sum.py h N`

Summing small value h for many times N

Example command: `python sum.py 0.1 10`

OUTPUT:

0: $0.0 + 0.1 \Rightarrow 0.1$

1: $0.1 + 0.1 \Rightarrow 0.2$

2: $0.2 + 0.1 \Rightarrow 0.300000000000000000000004$

3: $0.300000000000000000000004 + 0.1 \Rightarrow 0.4$

4: $0.4 + 0.1 \Rightarrow 0.5$

...

7: $0.7 + 0.1 \Rightarrow 0.799999999999999999999999$

...

9: $0.899999999999999999999999 + 0.1 \Rightarrow 0.999999999999999999999999$

Caution for conditional branch (条件分岐における注意)

Calculation of integers does not produce errors.

=> Conditional judgement only using integers works properly

整数変数のみでの条件判断は誤差が出ないので問題ない

```
if i * 10 == 30:
```

```
    print("i == 30") # executed if i == 30
```

Calculation of floating points can produce roundoff error.

=> Strict conditional judgement often does not work properly: **Must not be used!!**

実数計算では丸め誤差が発生するので、厳格な条件判断は使ってはいけない

```
if x * 10.0 == 30.0:
```

```
    print("x == 3.0") # expected to execute if x == 3.0, but may be not
```

[Important!!] Consider possible errors:

【重要】起こりうる誤差 (epsilon: eps) を考慮した条件判断をする

```
eps = 1.0e-30 # epsilon: small, but a bit larger value than possible error
```

```
if abs(x * 10.0 - 30.0) < eps:
```

```
    print("x == 3.0") # executed if x is practically equal to 3.0
```


Program: bad_if.py

Usage: python bad_if.py h n answer

Check the condition $h * n == \text{answer}$

python bad_if.py 0.1 1 0.1 **Confirm $\sum_{i=1}^1 0.1 == 0.1$**

Summing up 0.1 for 1 times: $v = 0.1$

$v == 0.1$?: **True**

$|v - 0.1| < 1e-10$?: **True**

python bad_if.py 0.1 2 0.2 **Confirm $\sum_{i=1}^2 0.1 == 0.2$**

Summing up 0.1 for 2 times: $v = 0.2$

$v == 0.2$?: **True**

$|v - 0.2| < 1e-10$?: **True**

python bad_if.py 0.1 3 0.3 **Confirm $\sum_{i=1}^3 0.1 == 0.3$: Failed**

Summing up 0.1 for 3 times: $v = 0.3000000000000000004$

$v == 0.3$?: **False** **$\sum_{i=1}^3 0.1 == 0.3$ では判断を間違える**

$|v - 0.3| < 1e-10$?: **True** **$|\sum_{i=1}^3 0.1 - 0.3| < \text{eps}$ (eps = 10^{-10}) では正しく判断できる**

How to use conditional branch, if (条件分岐の判断)

Bad (悪い例):

`if x * 10.0 == 30.0:`

DO NOT use the strict comparison '==' for floating values
(浮動小数点の比較には、厳密な比較 == は使わない)

Good (良い例):

`eps = 1.0e-30 # epsilon:`

A value satisfactory smaller than minimum expected value
(想定される誤差よりも十分大きい、
なるべく小さい値を設定する)

`if abs(x * 10.0 - 30.0) < eps`

Program: bad_int.py

Usage: python bad_int.py h n

Check interger conversion of the summation of h for n times

python bad_int.py 0.1 100

Summing up 0.1 for 100 times: $v = 9.999999999999998$

$\text{int}(9.999999999999998) = 9$

10でなければいけない

$\text{int}(9.999999999999998 + 1\text{e-}10) = 10$

eps (10^{-10}) を加えてから $\text{int}()$ を取ることで**正しい解**

python bad_int.py 0.4 20

Summing up 0.4 for 20 times: $v = 8.0000000000000002$

$\text{int}(8.0000000000000002) = 8$

正しい解だが、 v には誤差があることに注意

$\text{int}(8.0000000000000002 + 1\text{e-}10) = 8$

eps (10^{-10}) を加えてから $\text{int}()$ を取っても**正しい解**

python bad_int.py 1.2 20

Summing up 1.2 for 20 times: $v = 23.999999999999993$

$\text{int}(23.999999999999993) = 23$

24でなければいけない

$\text{int}(23.999999999999993 + 1\text{e-}10) = 24$

eps (10^{-10}) を加えてから $\text{int}()$ を取ることで**正しい解**

Case for floating point to integer conversion (浮動小数点 => 整数変換):

Bad (悪い例):

$n = \text{int}(v)$

Good (良い例):

$\text{eps} = 1.0\text{e-}6$

$n = \text{int}(v + \text{eps})$

Typical cases for FP calculations with care

Evaluate possible errors every time for FP floating point calculations

- Error originates from the limited length of FP type: underflow, overflow

Representation range of 64bit FP (IEEE 754 standard)

Exponent: 11 bit **-1024 ~ +1023**

Fraction : 23 bit 4,503,599,627,370,495: **16 digits**

- **FP type in computer cannot represent accurate values for most of integers**

$$100.0_{10} = 1.5625 \times 64 = (1 + 2^{-1} + 2^{-4}) \times 2^6 = (1.1001)_2 \times 2^4$$

- **Most of FP values in computer include errors**

$$1.0/3.0 = 0.3333\dots333 \text{ (16 digits)} \quad \text{Error} \sim 10^{-16} \text{ should be included}$$

Conditional branch:

Bad: if $x * 10.0 == 30.0$: **No guarantee to get the correct judge 'true'** even if $x = 3.0$

Good: $\text{eps} = 1.0\text{e-}30$ # epsilon: A value satisfactory smaller than expected values

if **$\text{abs}(x * 10.0 - 30.0) < \text{eps}$** : **Gives the correct judge within the error of eps**

FP => integer conversion:

How to calculate the number of division in the range xmin – xmax at xstep step

Bad: $n = \text{int}((\text{xmax} - \text{xmin}) / \text{xstep})$: The value in int() can include error.

Even if the correct value is $n = 3.0$,

you will get $n = 2$ if int() becomes $2.99999\dots$ due to error,.

Good:

$$\text{eps} = 1.0\text{e-}6$$

$$n = \text{int}((\text{xmax} - \text{xmin}) / \text{xstep} + \text{eps})$$

Even if $(\text{xmax} - \text{xmin}) / \text{xstep}$ becomes smaller than the expected integer due to error,

you can receive the correct value as long as the error is smaller than eps.

数値演算プログラムの一般的な注意

浮動小数点型の演算では、常に誤差を意識すること

- ・ 変数長の制限による誤差: underflow, overflow

IEEE 754の標準で、64bit浮動小数点の範囲は

指数部: 11 bit $-1024 \sim +1023$

仮数部: 23 bit 4,503,599,627,370,495: 16桁

- ・ 浮動小数点では、整数を“正確に”表現できない

$$100.0_{10} = 1.5625 \times 64 = (1 + 2^{-1} + 2^{-4}) \times 2^6 = (1.1001)_2 \times 2^4$$

- ・ 有限の桁数の浮動小数点の表現は、ほぼすべての場合に誤差を含む

$$1.0/3.0 = 0.3333...333 \text{ (小数点以下16桁)} \quad 10^{-16} \text{ 程度の誤差が発生する}$$

条件分岐の判断:

悪い例: `if x * 10.0 == 30.0:` `x = 3.0` であっても、**true と判断される保証はない**

良い例: `eps = 1.0e-30` # epsilon: 想定される誤差よりも十分大きい、なるべく小さい値を設定する。

`if abs(x * 10.0 - 30.0) < eps:` **誤差 eps 以内で必ず実行される**

浮動小数点 => 整数変換: `xmin ~ xmax` の範囲を `xstep` 毎の幅で分割したときの分点の数

悪い例:

`n = int((xmax - xmin) / xstep):`

`(xmax - xmin) / xstep` が誤差により `2.99999...` となった場合、

本来は `int() = 3` となって欲しいのに、`2` になってしまう

良い例:

`eps = 1.0e-6`

`n = int((xmax - xmin) / xstep + eps):`

`(xmax - xmin) / xstep` が誤差により期待する整数値より小さくなくても、

誤差が `eps` より小さければ、本来期待している整数値が得られる

Precision and errors in computer

Data bit width (データ長): Determine the upper limit of precision
=> Roundoff (rounding) error (丸め誤差)

Other error sources

- **Overflow (積み残し誤差, 桁あふれ):**

e.g. by summation between large integers (有効桁数を超える整数の和・積)

⇔ underflow

(overflow and underflow can be detected by CPU / software
but may deteriorate calculation speed)

- **Roundoff error (桁落ち誤差): By subtracting very similar values**

ex: for 4 digits calculation:

$$5\sqrt{41} - 32 \sim 5 * 6.403 - 32.00 = 32.015 - 32.00 = 32.02 - 32.00 = 0.02$$

The given values have 4 significant digits
but the result has only 1 significant digits

Avoid subtraction between similar large values

- **Loss of trailing digits (情報落ち):**

by summing / subtracting between largely-different values

ex: $1000 + 1.456 = 1001$ (The initial significant value of .456 is lost)

Errors in calculation process

- Overflow (summing large values)
- Underflow (huge numbers of summing up small values)
- Rounding off error
- **Information buried** (情報埋没)
- **Truncation error** (打ち切り誤差)

To sum up values slowly approaching to zero:

- **Taylor expansion** (テーラー展開)
- **Summation of Coulomb energy** (Coulombエネルギーの和)

Need to terminate the summation if calculation time has limitation or the result reaches the required precision

(計算時間と必要な精度に応じて、どこかで計算を打ち切る)

- **Convergence error** (収束誤差)
The required precision (often expressed EPS) is given to judge the termination of iterative convergence calculations
- **Errors originating from physical model** (物理モデルの誤差)

Information buried (情報埋没)

Program: python information_buried.py

e.g., calculate $\exp(-40)$ by $\exp(x) = \sum_{n=0} x^n/n!$

Summing up large values with
opposite signs results in
significant errors (正負が交番する
大きな数の和を取るために誤差が大きくなる)



Better to add positive values
only

$A = \sum_{n=0}^N (-x)^n/n!$ (if $x < 0$)
, and take $\frac{1}{A} = \exp(-40)$

Exact value $4.24835425529159 \times 10^{-18}$

$N: \sum_{n=0}^N x^n/n! \quad 1.0 / \sum_{n=0}^N (-x)^n/n!$

0 :	1	1
1 :	-39	0.024390244
2 :	761	0.0011890606
18 :	7.3620174e+12	5.290335e-14
19 :	-1.5234693e+13	2.4096905e-14
20 :	2.9958728e+13	1.153502e-14
21 :	-5.6123978e+13	5.7878667e-15
22 :	1.0039003e+14	3.0368438e-15
23 :	-1.7180825e+14	1.6625449e-15

Sum up large +/- values

79 :	-1.3651644e+09	4.2483543e-18
115:	5.8811462	4.2483543e-18
116:	5.8811665	4.2483543e-18

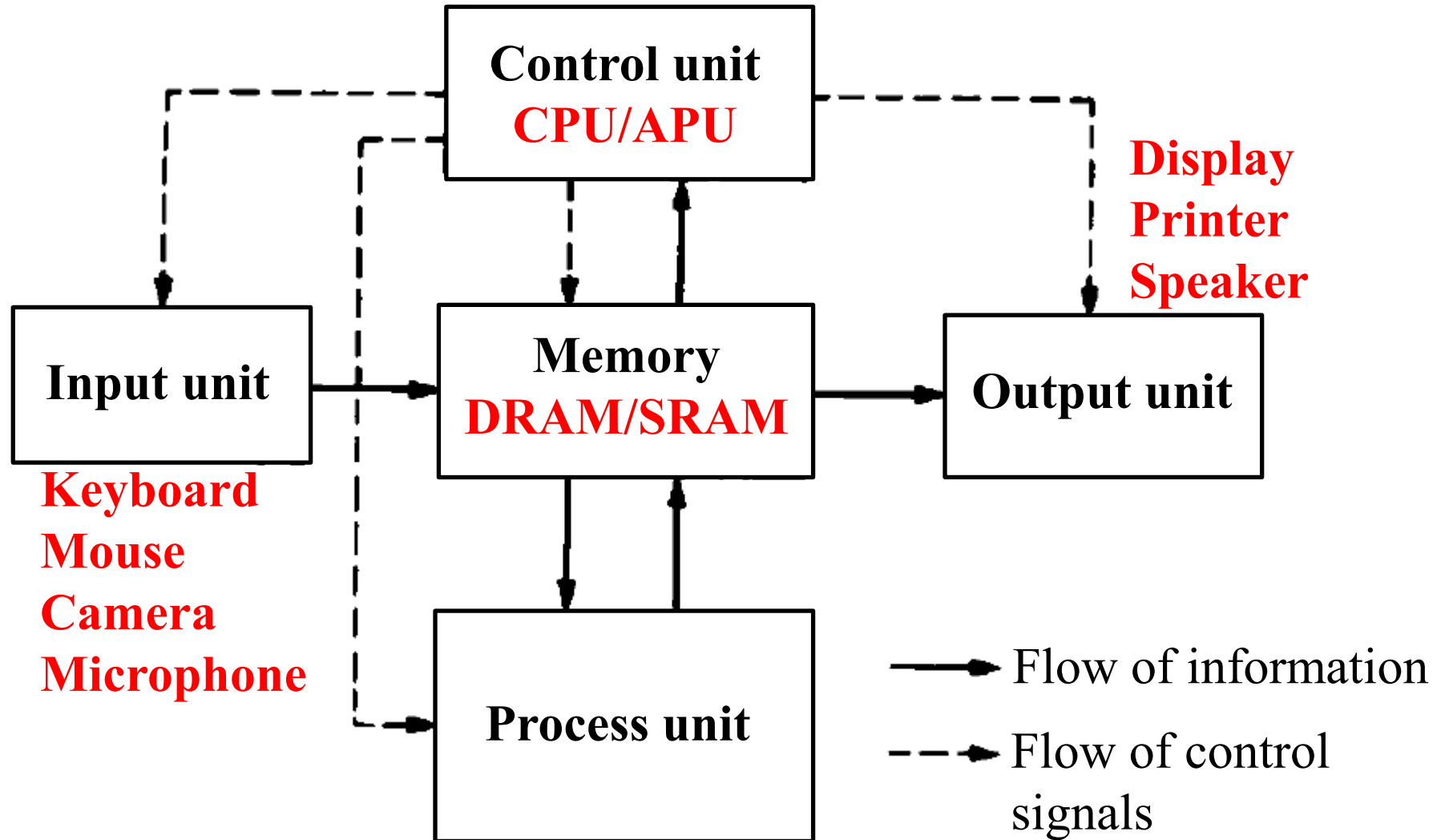
Well converged,
but 18 digits of error!!

Supplementary materials

Structure of typical computer

(基本的な計算機の構成)

大河内他、基礎 電子計算機、実教出版



Computer architectures

4bit CPU: Intel 4004 (1971) data 4bit, address 12bit
8bit CPU: 8008 (1972) data 8bit, address 14bit
16bit CPU: 8086 (1978) data 16bit, address 20bit
32bit CPU: 80386SX (1985) External data/address 32bit
Internal data 16bit, address 24bit
80486 (1989) data 32bit, address 32bit
Pentium,,,
64bit CPU: Pentium Pro(?), Itanium, Core i,, ...

Pentium Pro:

Processor 32bit: Operation (命令)・Process (データ処理) in CPU

External data bus (外部データバス)

64bit: Data transfer with memory / external units

Floating point operation (浮動小数点演算)

80bit

Logical operations (bitwise operations)

(論理演算, ビット演算)

Logical NOT (Bitwise inversion) (論理否定, ビット反転)

$$\text{NOT } 0 = 1; \text{NOT } 1 = 0$$

Logical AND (論理積)

$$0 \text{ AND } 0 = 0; 1 \text{ AND } 0 = 0$$

$$0 \text{ AND } 1 = 0; 1 \text{ AND } 1 = 1$$

Logical OR (論理和)

$$0 \text{ OR } 0 = 0; 1 \text{ OR } 0 = 1$$

$$0 \text{ OR } 1 = 1; 1 \text{ OR } 1 = 1$$

Logical Exclusive OR (排他的論理和)

$$0 \text{ XOR } 0 = 0; 1 \text{ XOR } 0 = 1$$

$$0 \text{ XOR } 1 = 1; 1 \text{ XOR } 1 = 0$$

Required data size: Character type

Alphanumeric (英数字文字):

0~9, A~Z, a~z,

Control chars (制御文字) etc

ASCII code: 7 bit (0 ~ 127)

Extended ASCII code

Add non-English chars,
symbols etc: 8 bit

Japanese

ASCII+half-width Kana (半角カナ): **8bit**

Kanji・Kana (Full-width Kana, 全角文字): **16 bit**

Shift-JIS (SJIS), JIS, EUC-JP

Universal character codes

(全世界共通文字コード)

Unicode: Started from 2 Bytes (Ver1.0.0)

Extended to 1 – 4 Bytes (UCS, Unicode / UTF-7/8/16 etc)

制御 文字	10 進	16 進	文字	コード	10 進	16 進	文字	10 進	16 進	文字	10 進	16 進	文字
^@	0	00		NUL	32	20	!	64	40	@	96	60	'
^A	1	01		SOH	33	21	!	65	41	A	97	61	a
^B	2	02		STX	34	22	..	66	42	B	98	62	b
^C	3	03		ETX	35	23	#	67	43	C	99	63	c
^D	4	04		EOT	36	24	\$	68	44	D	100	64	d
^E	5	05		ENQ	37	25	%	69	45	E	101	65	e
^F	6	06		ACK	38	26	&	70	46	F	102	66	f
^G	7	07		BEL	39	27	,	71	47	G	103	67	g
^H	8	08		BS	40	28	(72	48	H	104	68	h
^I	9	09		HT	41	29)	73	49	I	105	69	i
^J	10	0A		LF	42	2A	*	74	4A	J	106	6A	j
^K	11	0B		VT	43	2B	+	75	4B	K	107	6B	k
^L	12	0C		FF	44	2C	,	76	4C	L	108	6C	l
^M	13	0D		CR	45	2D	-	77	4D	M	109	6D	m
^N	14	0E		SO	46	2E	.	78	4E	N	110	6E	n
^O	15	0F		SI	47	2F	/	79	4F	O	111	6F	o
^P	16	10		DLE	48	30	0	80	50	P	112	70	p
^Q	17	11		DC1	49	31	1	81	51	Q	113	71	q
^R	18	12		DC2	50	32	2	82	52	R	114	72	r
^S	19	13		DC3	51	33	3	83	53	S	115	73	s
^T	20	14		DC4	52	34	4	84	54	T	116	74	t
^U	21	15		NAK	53	35	5	85	55	U	117	75	u
^V	22	16		SYN	54	36	6	86	56	V	118	76	v
^W	23	17		ETB	55	37	7	87	57	W	119	77	w
^X	24	18		CAN	56	38	8	88	58	X	120	78	x
^Y	25	19		EM	57	39	9	89	59	Y	121	79	y
^Z	26	1A		SUB	58	3A	:	90	5A	Z	122	7A	z
^[27	1B		ESC	59	3B	:	91	5B	[123	7B	{
^\	28	1C		FS	60	3C	<	92	5C	\	124	7C	
^]	29	1D		GS	61	3D	=	93	5D]	125	7D	}
^^	30	1E	▲	RS	62	3E	>	94	5E	^	126	7E	~
^-	31	1F	▼	US	63	3F	?	95	5F	-	127	7F	°